

---

---

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

---

---

УДК 517

**М. Литовко**  
студент

**Л.В. Васяк**

к.п.н, доцент кафедры "Высшая математика и прикладная информатика"  
Забайкальский институт железнодорожного транспорта  
г. Чита, Россия

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

Наша жизнь полна неожиданностей. Мы знаем, что в ней много интересного и загадочного. Именно такими являются понятия "софизм" и "парадокс".

Наверное, каждый из нас слышал фразу "два умножить на два равно пяти" или другие противоречащие здравому смыслу высказывания. Таких примеров очень много. Это софизм, намеренное ложное утверждение, с целью запутать собеседника. Софизм - это некоторая головоломка, в которой кроется ошибка. Парадокс - это странное утверждение, расходящееся с общепринятым мнением, но в отличие от софизма, ошибка в нем допущена не намеренно. Парадоксы известны уже более двух тысяч лет.

При подготовке к внутри вузовской конференции мы нашли интересный парадокс. Сумма всех натуральных чисел равна  $-1/12$ . Работа с рядами на бесконечности всегда достаточно "опасна". Разложение в ряд функции это некоторое приближение. Этот парадокс открыл Сринивас Рамануджан. Он доказал это несколькими способами.

В своей работе Рамануджан доказал, что  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ , используя два способа.

Он обратил внимание, что ряд  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$  похож на знакопередающийся натуральный ряд  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ .

Для того, чтобы привести ряд  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$  к виду  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ , мы можем вычесть величину, которая выражается рядом  $4 + 8 + 12 + 16 + \dots$ , который получается умножением исходного ряда  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$  на 4.

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots,$$

$$4c = 4 + 8 + \dots,$$

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

Далее, можно заметить, что ряд  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  является разложением в степенной ряд функции  $1/(1+x)^2$  при  $x$ , равном 1. Соответственно, Рамануджан заключает:

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

---

Поделив обе части на  $-3$ , получаем  $c = -1/12$ .

Второй способ доказательства основан на регуляризации дзета-функцией  $\zeta(s)$ .

Интересно, что значение  $-1/12$  встречается в физике, это можно наблюдать в теории бозонных струн, при попытке рассчитать энергетические уровни струны. Регуляризацию натурального ряда используют при расчете эффекта Казимира для скалярного поля в одномерном пространстве.

Ряд  $1+2+3+4+\dots$  не единственный ряд "с парадоксами". Ряду Гранди

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

метод суммирования Чезаро позволяет присвоить также конечное значение  $1/2$ .

Сгруппируем члены данного ряда:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Или можно сгруппировать по-другому:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Таким образом, различной расстановкой скобок в ряде Гранди, можно получить в качестве суммы и 0, и 1. Используя методы работы со сходящимися геометрическими прогрессиями получим третье значение 0,5.

Этот парадокс, намеренная ошибка, заблуждение или реальный факт?

В статье "Ошибка Пифагора" [2], выдвигается математическая гипотеза, объясняющая причину появления парадоксов. Согласно полученным результатам все "ошибки" высшей математики "перекочевали" из фундаментальных основ математики древней античности.

Хочется закончить статью словами Аристотеля: *"Бесконечность не существует актуально, как бесконечное тело или величина, воспринимаемая непосредственно органами чувств... Бесконечность существует потенциально, бесконечное проявляется в движении"* [2]. Он как будто предвидел проблемы актуальной бесконечности, но последующее развитие фундаментальной науки привело к появлению парадоксов в математике.

#### Список литературы

1. Кудрявцев А.В. Первоисточники парадоксов в математике. // Ordered chaos: modern problematics of physical, mathematical and chemical sciences: Materials digest of the LXIII International Research and Practice Conference and the Stage 2 of the Championship in Physico-mathematical sciences. - London, September 12-17, 2013. International Academy of Science and Higher Education. - London: IASHE, 2013.

2. Д. Клещев, Ошибка Пифагора // "Академия Тринитаризма", М., Эл № 77-6567, публ.15102, 17.02.2009 URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1499-kl.pdf> (дата обращения: 5.04.2018).

© М. Литовко, Л.В. Васяк, 2018